

Aufgabe 9: Hyperbelbahn

Betrachten Sie einen Kometen der Masse m und Energie $E > 0$, der sich im attraktiven Potential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0$$

bewegt. Für $\alpha = G m m_{\text{Sonne}}$ entspräche dies der Bewegung eines Kometen im Gravitationsfeld der Sonne, wenn die Masse des Kometen gegenüber der Masse der Sonne vernachlässigbar klein wäre.

Führen Sie das Integral

$$t = \sqrt{2m} \int \frac{dr}{\sqrt{E + \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}}$$

aus, indem Sie dieses in die Form

$$t = C \int \frac{r dr}{\sqrt{(r+a)^2 - a^2 e^2}}$$

bringen und eine Parameterdarstellung für r , $(r(\xi)+a)^2 = a^2 e^2 \cosh^2 \xi$ substituieren. Dabei ist $\cosh(\xi)$ der hyperbolische Kosinus. Nehmen Sie die Ergebnisse, die in der Vorlesung aus der parametrischen Darstellung der Ellipse gewonnen wurden, wobei Sie $r(\xi)$ noch berechnen müssen, und vergleichen Sie diese mit den hier erhaltenen. Welche Unterschiede ergeben sich? Betrachten Sie $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Aufgabe 10: Bahnform und resultierende Kraft: Grundlage

Nutzen Sie für die Bewegung im Zentralpotential die Drehimpulserhaltung $L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \stackrel{!}{=} \text{const.}$, um aus der eindimensionalen radialen Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr}, \quad U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

den Zusammenhang

$$f(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = \frac{L^2}{mr^4} \left[\frac{d^2 r}{d\phi^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 - r \right]$$

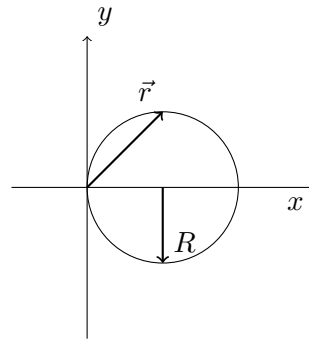
zwischen der Bahnkurve $r(\phi)$ und der Kraft $f(r)$ herzuleiten.

Hinweise:

- Was ist die Abhängigkeit der Bahnkurve $r(t)$ von ϕ ? Verwenden Sie die Kettenregel für die Ableitungen.

Aufgabe 11: Bahnform und resultierende Kraft: Anwendung

Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 2, um die Kraft herzuleiten, die auf ein Teilchen wirkt, das sich in einem Zentralpotential mit Sitz im Ursprung auf einer Kreisbahn durch den Ursprung mit Radius R durch eben jenes Potential bewegt. (Siehe Skizze)



Hinweise:

- Um den Betrag $r = |\vec{r}|$ zu bestimmen, betrachten Sie das Dreieck $\triangle = (0, \vec{r}, O)$ mit O der Ursprung des Kreises.

Aufgabe 12: Streuung am abstoßenden Coulombpotential

In der Vorlesung wurde das Problem der Streuung an einem anziehenden Coulombpotential behandelt und der Rutherfordsche Wirkungsquerschnitt hergeleitet. Behandeln Sie nun das abstoßende Potential

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha > 0.$$

Was ändert sich für die Bahnkurve $r(\phi)$ und was für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$? Es sind keine vollständigen Rechnungen verlangt, aber Sie sollten Ihre Antworten begründen können (auch Anhang von Formeln).